

1. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{n}}{(n^2+2020) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot (n+1)} \right)}$.
2. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^2 - n} - \sqrt[4]{n^2 + 19} \right)$.
3. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x}}{x - 1}$.
4. Rozłożyć wielomian $w(x) = x^4 + 16$ na nierozkładalne czynniki rzeczywiste.
5. Przy dzieleniu wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - 1$ otrzymujemy iloraz $q(x) = 8x^2 + 4x - 14$ oraz resztę $r(x) = -5$. Obliczyć pierwiastki wielomianu $w(x)$.
6. Wykazać, że suma odwrotności pierwiastków wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ jest liczbą wymierną.
7. Rozwiązać nierówność $x^4 + x^2 \geq 2x$.
8. Dla jakich wartości a i b wielomian $w(x) = 2x^3 + (a - 2b)x^2 - (2a + 3b)x + 6ab$ dzieli się bez reszty przez trójmian kwadratowy $x^2 - 4$?
9. W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ rozwiązać równanie $\sin^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^2 x = 0$.
10. Wiedząc, że $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{5}{9}$, obliczyć $\operatorname{tg}^2 \alpha$.
11. Udowodnić, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ jest liczbą całkowitą.
12. Wyznaczyć dla jakich wartości parametru k równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2k+1}{k-1}$ ma rozwiązanie.
13. Narysować wykres funkcji: $f(x) = \sin^2 x + |\cos x| \cdot \cos x$, a następnie określić, ile miejsc zerowych ma ta funkcja w przedziale $\langle -2\pi, 10\pi \rangle$.
14. Wyznaczyć dla jakich wartości parametru k równanie $2\sin^2 x - 2\sin x + 3 = |k - 2| - 6$ ma rozwiązanie.
15. Udowodnić, że liczba $\sin^2 16^\circ + \cos 46^\circ \cos 14^\circ$ jest liczbą wymierną.
16. Obliczyć $\sin^4 x + \cos^4 x$ wiedząc, że $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
17. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16}$ należące do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$.
18. Obliczyć sumę stu najmniejszych dodatnich rozwiązań równania $\sin 2x = \cos x$.
19. Rozwiązać równanie: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$.
20. Obliczyć $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$.